OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XI -a

Barem de corectare și notare

1) a) Mărginirea : $0<x_n<\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+1}}_{n \text{ ori}}=\frac{n}{n+1}<1\Rightarrow 0<x_n<1,(\forall)n\geq 1$ **2p**

Monotonia : $x_{n+1}-x_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$...**1p**

Concluzia : şirul este convergent conform teoremei lui Weierstrass **1p**

b) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(e^{x_{n+1}}-e^{x_n}\right)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot e^{x_n}\cdot\left(e^{x_{n+1}-x_n}-1\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(e^{x_{n+1}-x_n}-1\right)$.....**2p**

$=2\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\left(e^{x_{n+1}-x_n}-1\right)}{x_{n+1}-x_n}\cdot\left(x_{n+1}-x_n\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\ln e\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ **1p**

2) $a_n=\left\{\sqrt{n^2+5n+9}\right\}=\sqrt{n^2+5n+9}-\left[\sqrt{n^2+5n+9}\right]$.....**1p**

Deoarece $(n+2)^2<n^2+5n+9<(n+3)^2\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+5n+9}\right]=n+2$.....**2p**

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+9}-(n+2)\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+9-(n+2)^2}{\sqrt{n^2+5n+9}+(n+2)}$ **2p**

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{9}{n^2}}+1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{2}$ **2p**

3) a) $A-I_n=A-A^3=A\cdot\left(I_n-A^2\right)=A\cdot(I_n-A)\cdot(I_n+A)$ **2p**

$A^3=I_n\Rightarrow\det A=1\Rightarrow A=$inversabilă.....**1p**

Din prima relație: $A-I_n=A(I_n+A)(I_n-A)\Rightarrow(-1)\cdot(I_n-A)=A(I_n+A)(I_n-A)$

$I_n-A=$ inversabilă şi deducem că $A\cdot(I_n+A)=-I_n\Rightarrow I_n+A=-A^{-1}$.....**1p**

3) b) $\det A=1\Rightarrow A^{-1}=A^{*}\Rightarrow \det A^{-1}=\det A^{*}$ **1p**

Dar $A^3=I_n\Leftrightarrow A\cdot A^2=I_n\Rightarrow A^{-1}=A^2\Rightarrow \det A^{-1}=\det A^2=(\det A)^2=1$.....**1p**

$I_n+A=-A^{-1}\Rightarrow I_n+A=-A^{*}\Rightarrow \det(I_n+A)=\det(-A^{*})=(-1)^n\cdot\det A^{*}=(-1)^n\cdot 1=(-1)^n$.**1p**

4) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Cum $\det(A)=2\Rightarrow ad-bc=2\Rightarrow ad,bc$ au aceeaşi paritate.....**2p**

Complementii algebrici ai matricei A sunt numerele $d,-b,-c,a$ **1p**

Cazul 1: ad,bc = pare $\Rightarrow$ cel puţin unul dintre numerele a şi d , respectiv b şi c trebuie să fie par.

Dacă a,b,c,d = pare $\Rightarrow ad\vdots 4$ şi $bc\vdots 4\Rightarrow (ad-bc)\vdots 4\Rightarrow$ contradicţie cu ipoteza $\det(A)=2$.

Deci cel puţin unul dintre numere este impar şi cel puţin un complement algebric va fi impar. **3p**

Cazul 2: ad,bc = impare $\Rightarrow a,b,c,d$ = impare deci toţi complementii algebrici vor fi impari. **1p**